Об определении плотностных неоднородностей в классе Сретенского

Ю.И. Дубовенко, *email: nemishayeve@ukr.net*
Украина, Киев, Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины,

Вследствие смены парадигмы в теори интерпретации потенциальных полей [1] актуальна разработка адекватного геофизической практике аппарата математического моделирования геофизических полей. Ключевое место в рамках новой методологии принадлежит аналитическим аппроксимациям среды и поля [2]. Предпосылки такого подхода изложены в работе [3]. В продолжение имеющихся разработок предлагается новая аппроксимационная схема для определения поверхности одного подкласса тяготеющих тел по заданному распределению аномалий силы тяжести.

Пусть на плоскости $z=0$ (ось z направлена вниз) заданы значения $U_z(x,0)$ вертикальной производной потенциала силы тяжести, обусловленного бесконечным цилиндром, вытянутым вдоль оси y. Этот обьект принадлежит классу двухмерных тел постоянной плотности, для которых существует *средняя плоскость* (проходящая через тело так, что любой перпендикуляр к ней пересекает поверхность тела только в двух точках по разные стороны от плоскости). Назовем этот класс тел классом Сретенского $Sr(1,G)$.

Совмещая со средней плоскостью аномальноо тела координатную плоскость $\xi o\eta$, аналитически опишем область G, занятую телом:

$$G=\{(\xi,\zeta): a\le\xi\le b,\ \zeta^{(1)}(\xi)\le\zeta\le\zeta^{(2)}(\xi)\}. \qquad (1)$$

При этом границу ∂G области G можно представить обьединением 2 контуров $\partial G_1\cup\partial G_2$ в виде:

$$\partial G_i=\{(\zeta,\xi): a\le\xi\le b,\ \zeta=\zeta^{(i)}(\xi),\ i=1,2\}. \qquad (2)$$

Рассмотрим подкласс $Sr(1,G_0)$ класса $Sr(1,G)$, когда $a=-\infty,\ b=\infty$, а оси координат ξ и x, ζ и z параллельны. Тогда, не нарушая общности, можно представить область G_0 и ее границы в виде:

$$G_0=\{(\xi,\zeta): -\infty<\xi<\infty,\ z^{(1)}\le\zeta\le z^{(2)}\},\ \partial G_{0i}=\{(\xi,\zeta): -\infty<\xi<\infty,\ z^{(i)}=\zeta^{(i)}(\xi),\ i=1,2\}. \qquad (3)$$

Подкласс $Sr(1,G_0)$ тяготеющих тел состоит из двух контактных поверхностей

$$z^{(i)}=\zeta^{(i)}(\xi),\ -\infty<\zeta<\infty,\ i=1,2, \qquad (4)$$

разделенных средней плоскостью $z=z_0>0$. Поставим задачу: определить контакты (4) по значениям вертикальной производной $U_z(x,0)$ потенциала силы тяжести.

Рассмотрим свойства производных потенциала силы тяжести, заданных в виде

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x}=2f\sigma\iint_G\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}d\xi d\zeta,\quad \frac{\partial U(x,z)}{\partial z}=2f\sigma\iint_G\frac{\zeta-z}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}d\xi d\zeta, \qquad (5)$$

где в данном случае

$$G=\{(\xi,\zeta): -\infty<\xi<\infty,\ 0\le\zeta\le\zeta(\xi)\}. \qquad (6)$$

Вследствие представления (6) двойные интегралы в (5) можно записать в виде

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x}=2f\sigma\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\zeta(\xi)}\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}d\zeta,\quad \frac{\partial U(x,z)}{\partial z}=2f\sigma\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\zeta(\xi)}\frac{\zeta-z}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

Отсюда, после ряда несложных аналитических преобразований будем иметь

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x}=2f\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\zeta(\xi)-z}{\xi-x}d\zeta,$$

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial z}=f\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta(\xi)-z]^2}{(\xi-x)^2+[\zeta(x)-z]^2}d\zeta+\begin{cases}2\pi f\sigma\zeta(x),\ z\le 0\\ 2\pi f\sigma[\zeta(x)-2z],\ 0<x<\zeta\\ -2\pi f\sigma\zeta(x),\ \zeta(x)\le z\end{cases}. \qquad (7)$$

Итак, функция $U_x(x,z)$ от z непрерывна, а функция $U_z(x,z)$ от z разрывна. На основании фундаментальных свойств (7) контактов (4) получаем при $z\to -0$ выражения

$$\frac{\partial U_e(x,0)}{\partial x}=2f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\zeta^{(i)}(\xi)}{\xi-x}d\zeta,\quad \frac{\partial U_e(x,z)}{\partial z}=f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\left\{2\pi\zeta^{(i)}(x)-\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(x)]^2}{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(\xi)]^2}d\zeta\right\}. \qquad (8)$$

В то же время на средней плоскости $z=z_0$ ($\zeta^{(1)}(x)<z_0<\zeta^{(2)}(x),\ -\infty<x<\infty$) из тех же соотношений (7) находим, что

$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial x}=2f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\zeta^{(i)}(\xi)-z_0}{\xi-x}d\zeta,$$

$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial z} = -2\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) = 2\pi f\sigma_2\left[\zeta^{(2)}(x) - 2z_0\right] + f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(i)}(\xi)-z_0\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(i)}(x)-z_0\right]^2}d\zeta\,. \qquad (9)$$

В различии представлений (8) и (9) заложена интересная возможность решения поставленной задачи. Действительно, найдем внутренний предел производной, вычислив интеграл Пуассона

$$\frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial U(\eta,z_0)}{\partial z}\frac{z_0}{(\eta-x)^2-z_0^2}d\eta\,, \qquad (10)$$

при этом представляя подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial z} = -2f\sigma_1\iint_{G_1}\frac{\zeta-z}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}d\xi d\zeta + 2f\sigma_2\iint_{G_1}\frac{\zeta-z}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}d\xi d\zeta\,,$$

где $G_i = \left\{(\xi,\zeta): -\infty < \xi < \infty,\ 0 \le \zeta \le \zeta^{(i)}(\xi)\right\}$.

Вычисляя интеграл (10), получим

$$\frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = -2\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) + 2\pi f\sigma_2\zeta^{(2)}(x) - f\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(i)}(x)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(i)}(\xi)\right]^2}d\zeta\,. \qquad (11)$$

Употребляя значение внешнего предела (8), из (11) найдем разность пределов:

$$\frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = 4\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) - 2f\sigma_1\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(1)}(x)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(1)}(\xi)\right]^2}d\zeta\,.$$

Обозначим через $W(x)$ функцию $W(x) = \frac{1}{4\pi f\sigma_1}\left\{\frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z}\right\}$ и получим уравнение для определения первого контакта $z^{(1)} = \zeta^{(1)}(x), -\infty < x < \infty$ в виде

$$\zeta^{(1)}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(1)}(x)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(1)}(\xi)\right]^2}d\zeta = W(x). \qquad (12)$$

Определив из этого уравнения функцию $\zeta^{(1)}(x)$, сможем вычислить приближение поля

$$\frac{\partial U_1(x,0)}{\partial z} = 2\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) - f\sigma_1\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(1)}(x)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(1)}(\xi)\right]^2}d\zeta\,.$$

А это, в свою очередь, позволяет найти в "чистом виде" эффект от второго контакта

$$\frac{\partial U_2(x,0)}{\partial z} = \frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial z}\,,$$

что позволяет из уравнения

$$2\pi f\sigma_2\zeta^{(2)}(x) - f\sigma_2\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(2)}(x)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(2)}(\xi)\right]^2}d\zeta = \frac{\partial U_2(x,0)}{\partial z} \qquad (13)$$

вычислить его приближение $z^{(2)} = \zeta^{(2)}(x), -\infty < x < \infty$.

Этот результат обобщается на случай *n* границ $z^{(i)} = \zeta^{(i)}(x), -\infty < x < \infty$, если между каждой парой этих границ можно провести среднюю плоскость. Алгоритм решения прошел первичную апробацию. На классе $Sr(1,\mathrm{G})$ последовательные приближения однозначны и устойчивы (сходящиеся).

1. *Страхов В.Н.* Смена парадигмы в теории линейных некорректных задач. – Москва, 2001.
2. *Страхов В.Н.* Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геофизике, геоинформатике и гравиметрии // Геофиз. журн. – 2007. – **29**, № 1.
3. *Дубовенко Ю.И.* Альтернативное определение плотности по градиенту поля силы тяжести в задаче Алексидзе // Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмического строительства, Ереван, 12-16.05.2013. – Ереван, 2013.